На правах рукописи

Васин Алексей Валерьевич

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМЫ В ПОЛНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ТРЕХВХОДОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2010

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Пензенский государственный университет» на кафедре «Дискретная математика».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Алехина М. А.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Мошков М. Ю.;
	кандидат физико-математических наук, доцент Нурмеев Н. Н.
Ведущая организация:	ФГОУВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Защита состоится «25» ноября 2010 г. в 14 ч 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, конференц-зал научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Автореферат разослан «____» октября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.081.24 при КФУ
кандидат физико-математических наук Еникеев А. И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Настоящая работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики – теории синтеза, надежности и сложности управляющих систем.

Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники. Все разнообразные средства цифровой техники: ЭВМ, микропроцессорные системы измерений и автоматизации технологических процессов, цифровая связь и телевидение и т.д. – строятся на единой элементной базе, в состав которой входят чрезвычайно разные по сложности микросхемы – от логических элементов, выполняющих простейшие операции, до сложнейших программируемых кристаллов, содержащих миллионы логических элементов. Логические элементы цифровых устройств во многом определяют функциональные возможности последних, их конструктивное исполнение, технологичность, надежность.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надежности управляющих систем относятся схемы из ненадежных функциональных элементов, реализующие булевы функции. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадежных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. Одна из основных моделей определяется инверсными неисправностями на выходах элементов. В диссертации решается задача построения асимптотически оптимальных (асимптотически наилучших) по надежности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах. Задача решается во всех полных базисах, содержащих функции не более чем трех переменных. Уделяется внимание сложности асимптотически оптимальных по надежности схем.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов рассматривал Дж. фон Нейман[1].Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией φ в неисправном состоянии,

[1]von Neuman J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies / edited by Shannon C., Mc. Carthy J. – Princeton : Princeton University Press, 1956 (Русский перевод: Автоматы. – М. : ИЛ, 1956. – С. 68–139.)

в которое переходит независимо от других элементов схемы с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$), реализует функцию $\bar{\varphi}$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 – некоторая абсолютная константа) при любом $\varepsilon \in (0; 1/6]$. Однако сложность такой схемы с ростом числа итераций увеличивается экспоненциально (примерно в 3^k раз, где k – число итераций).

Затем схемы с инверсными неисправностями на выходах элементов исследовались в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова, Д. Улига и некоторых других авторов, причем главное внимание уделялось сложности таких схем (задача синтеза наилучших по надежности схем не ставилась). Сформулируем полученные ими результаты.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, $m \in N$ (множество всех функциональных элементов E_i, функции которых e_i принадлежат базису B, будем также называть базисом[2] B). Каждому элементу E_i базиса приписано положительное число $v(E_i)$ – вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε подвержены инверсным неисправностям на выходах элементов. Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ схемы S. Ненадежность $P(S)$ схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, равна $P(S) = \max\limits_{\tilde{a}} P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$, где максимум берется по всем возможным входным наборам $\tilde{a}$ схемы S. Надежность схемы S равна $1-P(S)$. Вводится функция Шеннона $L_{p,\varepsilon}(n) = \max\limits_{f} \min\limits_{S} L(S)$, характеризующая сложность схем, реализующих булевы функции от n переменных в базисе B, где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leq p$, а максимум – по всем булевым функциям f от n переменных.

Пусть $\rho = \min\limits_{E_i}(v(E_i)/(n(E_i) - 1))$, где минимум берется по всем элементам E_i базиса, для которых $n(E_i) > 1$, $n(E_i)$ – число существенных перемен-

[2] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М. : Изд-во МГУ, 1984.

ных функции e_i, реализуемой элементом E_i, а $v(E_i)$ – вес функционального элемента E_i, $i = 1, \ldots, m$.

О. Б. Лупанов[3] показал, что для схем, реализующих булевы функции от n переменных и состоящих только из надежных элементов (т.е. при $\varepsilon = 0$ и $p = 0$), выполняется соотношение $L_{0,0} \sim \rho 2^n/n$.

С. И. Ортюков[4] для инверсных неисправностей на выходах элементов получил следующий результат. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $p > q(\varepsilon)L_g$, где L_g – минимальное число надежных элементов, необходимое для реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе, $q(\varepsilon)$ – некоторая функция, такая что $q(\varepsilon) = \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда существует такая функция $\rho(\varepsilon) \to \rho$ при $\varepsilon \to 0$, что $L_{p,\varepsilon}(n) \lesssim \rho(\varepsilon)2^n/n$.

Д. Улиг[5] для инверсных неисправностей на выходах элементов с вероятностью ошибки ε доказал, что для любых сколь угодно малых чисел b и h $(b, h > 0)$ существует такое число $\varepsilon'(\varepsilon' \in (0, 1/2))$, что при любом ε $(\varepsilon \in (0, \varepsilon'])$ и любом p, удовлетворяющем условию $p \geq (1 + h)\varepsilon L_g$ (точнее $p \geq q(\varepsilon)L_g$), справедливо соотношение $L_{p,\varepsilon}(n) \lesssim (1 + b)\rho 2^n/n$.

Таким образом, в результатах С. И. Ортюкова и Д. Улига асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к единице (при этом вероятность сбоя ε ограничена константой), т.е. найденные ими методы синтеза позволяют строить асимптотически оптимальные по сложности схемы, функционирующие с некоторым уровнем надежности.

Из результатов Н. Пиппенджера[6] следует, что в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов любую булеву функцию от n переменных можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leq 18\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/200]$, $L(S) \lesssim 1702^n/n$.

С. В. Яблонский[7] рассматривал задачу синтеза надежных схем в базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реали-

---

[3]Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М. : Изд-во МГУ, 1984.

[4]Ортюков С. И. Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (г. Москва, 27–29 января 1987 г.). – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. – С. 166–168.

[5]Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of Computation Theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). – Berlin : Springer-Verl, 1987. – P. 462–469.

[6]Pippenger N. On networks of Noisy Gates // 26 Symposium on Foundation on Computer science (Portland, 21–23 October 1985). – Portland : IEEE, 1985. – P. 30–38.

[7]Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center. – 1982. – № 7. – P. 11–19.

зующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, абсолютно надежный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор – ненадежные, подвержены произвольным неисправностям, ненадежность каждого из них не больше ε. Им доказано, что для любого $p > 0$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строит такую схему S, что $P(S) \leq p$, $L(S) \lesssim 2^{n-1}/n$.

В. В. Тарасов[8] рассматривал задачу построения схем сколь угодно высокой надежности (когда $P(S) \to 0$). Для базисов из ненадежных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом В. В. Тарасов нашел необходимые и достаточные условия, при которых произвольные булевы функции можно реализовать схемами сколь угодно высокой надежности. Из полученных им результатов следует невозможность построения сколь угодно надежных схем для всех, отличных от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при инверсных неисправностях на выходах элементов.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию f. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически наилучшей (асимптотически оптимальной) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

М. А. Алехина[9] решала задачу построения асимптотически оптимальных (асимптотически наилучших) по надежности схем при однотипных константных неисправностях только на входах или только на выходах элементов. Чтобы сформулировать полученные М. А. Алехиной результаты, введем необходимые определения.

Если неисправность такова, что элемент (реализующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$, реализует константу 0, то она называется неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, то такая неисправность называется неисправностью типа 1 на выходе элемента.

[8] Тарасов В. В. К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Матем. заметки. — 1976. — Т. 20. — № 3. — С. 391—400.

[9] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов : монография. — Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2006.

Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход элемента нуль не искажается, а единица с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0, 1/2)$) может превратиться в нуль. Входы всех элементов схемы переходят в неисправные состояния типа 0 независимо друг от друга. Неисправности типа 1 на входах элементов определяются аналогично.

Введем обозначения: B_2 – это множество всех булевых функций, зависящих от двух переменных $x_1,\ x_2$, а B_3 – это множество всех булевых функций, зависящих от трех переменных $x_1,\ x_2,\ x_3$.

М. А. Алехиной доказано, что во всех неприводимых полных базисах $B \subseteq B_2$ (исключая три случая) почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами S, функционирующими с ненадежностью $P(S)$, асимптотически равной $a\varepsilon^t$ при $\varepsilon \to 0$, константы a и t зависят от базиса и типа неисправностей, $a \in \{1, 2, 3\}$, $t \in \{1, 2\}$. Для почти всех функций сложность таких схем в случаях константных неисправностей только на выходах или только на входах элементов удовлетворяет соотношению $L(S) \lesssim k_B 2^n/n$, причем мультипликативная константа k_B зависит только от базиса B, $40 \leq k_B \leq 168$.

Если неисправность элемента такова, что поступающее на вход значение σ ($\sigma \in \{0, 1\}$) с вероятностью $\varepsilon \in (0; 1/2)$ может превратиться в $\bar{\sigma}$, то она называется инверсной неисправностью на входе элемента.

В. В. Чугуновой[10] доказано, что во всех неприводимых полных базисах $B \subseteq B_2$ при инверсных неисправностях на входах почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами S, функционирующими с ненадежностью $P(S)$, асимптотически равной $a\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, константа a зависит от базиса, $a \in \{2, 3, 4\}$. Для почти всех функций сложность предлагаемых схем удовлетворяет соотношению $L(S) \lesssim k_B 2^n/n$, причем мультипликативная константа k_B также зависит только от базиса B, $168 \leq k_B \leq 504$.

М. А. Алехина[11] рассматривала инверсные неисправности на выходах элементов и доказала, что при инверсных неисправностях на выходах элемен-

[10]Чугунова В. В. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на входах элементов : дис. ... канд. физико-математических наук. — Пенза, 2007.

[11]Алехина М. А. О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях элементов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2005. — Т. 12. — № 2. — С. 3–11. — (Серия 1).

тов в базисах $\{x_1|x_2\}$ и $\{x_1 \downarrow x_2\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами S, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$. Сложность предлагаемых схем для почти всех функций $L(S) \lesssim k_B 2^n/n$, причем мультипликативная константа k_B также зависит только от базиса B, $k_B = 672$.

С. И. Аксеновым[12] получена верхняя оценка ненадежности схем в произвольном полном конечном базисе B при инверсных неисправностях на выходах элементов. Он доказал, что существуют такие положительные константы ε_0 и d, зависящие от базиса B, что любую булеву функцию можно реализовать схемой S, ненадежность которой

$$P(S) \le 5\varepsilon + d\varepsilon^2 \tag{1}$$

при любом $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Отрицательный ответ на вопрос о возможности снижения мультипликативной константы 5 в оценке ненадежности (1) для некоторых полных конечных базисов получен в этой работе.

С. И. Аксенов[13] получил следующий результат. Пусть

$$\Upsilon_1 = \{\bar{x}, 0, 1\} \cup \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, ..., x_1 \& x_2 \& ... \& x_k, ...\},$$

$$\Upsilon_2 = \{0, 1\} \cup \{x_1 \& x_2, x_1 \& x_2 \& x_3, ..., x_1 \& x_2 \& ... \& x_k, ...\} \cup$$
$$\cup \{\bar{x}_1 \& x_2, \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3, ..., \bar{x}_1 \& x_2 \& ... \& x_k, ...\}$$

и $\Upsilon_3 = \Upsilon_1^*$, $\Upsilon_4 = \Upsilon_2^*$ (Υ_3 и Υ_4 – множества функций, двойственных функциям множеств Υ_1 и Υ_2 соответственно). Если полный в P_2 базис B не является подмножеством ни одного из множеств $\Upsilon_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, то существуют такие положительные константы ε_0 и d, что в базисе B любую булеву функцию f можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \le 4\varepsilon + d\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Пусть булева функция $m(x_1, x_2, ..., x_k)$ зависит от k $(k \ge 3)$ переменных и обладает следующим свойством: найдется такой набор $(b_1, b_2, ..., b_k)$,

[12] Аксенов С. И. О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – № 6 (21). — 2005. — С. 42–55. — (Естественные науки).

[13] Аксенов С. И. О надежности схем в широком классе полных базисов // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Международного семинара, посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (г. Москва, 18–23 июня 2007 г.). — М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2007. — С. 55–56.

что на нем и всех соседних с ним наборах функция m принимает значение 0, а на наборе $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_k)$ и всех соседних с ним наборах – значение 1. Пусть $\tilde{G}$ – множество всех булевых функций с названным свойством. Введем обозначение: $N_B(\tilde{G})$ – наименьшее число надежных элементов, необходимое для реализации какой-либо функции из множества $\tilde{G}$ в базисе B.

М. А. Алехиной и С. И. Аксеновым[14] доказано, что в произвольном полном конечном базисе B для любого $b > 0$ существуют такие константы $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ и $d > 0$, что при любом n любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно реализовать схемой S, для которой при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ верно $P(S) \leq \varepsilon N_B(\tilde{G}) + d\varepsilon^2$, $L(S) \lesssim 3(1+b)\rho 2^n/n$ при $n \to \infty$.

М. А. Алехина, А. В. Шилов[15] рассматривали реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов во всех полных конечных неприводимых базисах, содержащих функции двух переменных, и нашли верхние оценки ненадежности схем.

Вопрос о возможности построения асимптотически наилучших по надежности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов в базисах, не содержащих медиану, а также отличных от $\{x_1|x_2\}$ и $\{x_1 \downarrow x_2\}$, оставался открытым.

Пусть B_3 – это множество всех булевых функций, зависящих от трех переменных x_1, x_2, x_3 (зависимость может быть фиктивной). В этой диссертационной работе решена задача синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем во всех полных базисах $B \subseteq B_3$ при условии, что элементы подвержены инверсным неисправностям на выходах. Уделено внимание сложности таких схем.

Цель работы. В работе ставилась следующая цель: решить задачу синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на выходах элементов во всех полных базисах, содержащих функции не более чем трех переменных; оценить сложность построенных схем и сравнить со сложностью

[14]Алехина М. А., Аксенов С. И. О сложности надежных схем при инверсных неисправностях на выходах элементов // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Международного семинара, посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (г. Москва, 18–23 июня 2007 г.). — М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ, 2007. — С. 56—59.

[15]Алехина М. А., Шилов А. В. Верхние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при инверсных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. — 2006. — № 5 (26). — С. 4—12. — (Естественные науки).

минимальных схем, построенных из абсолютно надежных элементов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Укажем наиболее важные из них:

1. Во всех полных базисах $B \subseteq B_3$ для почти всех булевых функций построены асимптотически оптимальные по надежности схемы.

2. Найдены все полные базисы $B \subseteq B_3$, в которых для почти всех функций любая схема S имеет ненадежность $P(S) \geq 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Следовательно,

   a) в этих базисах для почти всех функций асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$;

   b) мультипликативная константа 5 в результате (1) С. И. Аксенова не может быть понижена в некоторых полных базисах.

3. Для любого полного базиса $B \subseteq B_3$ найдена такая константа $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, что для почти всех функций ненадежность асимптотически оптимальных по надежности схем асимптотически равна $c\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Найдены все функции трех переменных, наличие которых в полном базисе позволяет реализовать произвольную булеву функцию f такой схемой S, что $P(S) \sim \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

5. Во всех рассматриваемых базисах построены схемы, которые для почти всех функций являются асимптотически оптимальными по надежности, а их сложность отличается от сложности минимальных схем, построенных из абсолютно надежных элементов, в $3(1+b)$ раз, где b – любое сколь угодно малое положительное число.

Методы исследований. В работе использованы методы дискретной математики и математической кибернетики, теории вероятностей, математического анализа. Кроме того, предложены новые методы получения нижних и верхних оценок ненадежности схем.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях надежности и сложности схем из ненадежных функциональных элементов. Предложенные методы синтеза схем, асимптотически оптимальных по надежности, могут найти применение при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Апробация работы. Результаты диссертации представлены на международных и российских конференциях и семинарах, среди которых: IX и X Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (г. Москва, 2007 г. и 2010 г.); Международная конференция «Проблемы автоматизации и управления в технических системах» (г. Пенза, 2008 г. и 2009 г.); VIII Международная научная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (г. Москва, 2009 г.); VII молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям (г. Москва, 2009 г.); IV Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (г. Омск, 2009 г.); XVIII Международная школа-семинар «Синтез и сложность управляющих систем имени академика О. Б. Лупанова» (г. Пенза, 2009 г.); семинар «Математические вопросы кибернетики» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (МГУ им. М. В. Ломоносова); семинар «Надежность управляющих систем» под руководством профессора Н. П. Редькина (МГУ им. М. В. Ломоносова).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 17 работах автора, список которых приведен в конце автореферата; среди них 7 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций. Четыре работы из 17 написаны в соавторстве с научным руководителем М. А. Алехиной (опубликованные результаты являются собственными, М. А. Алехиной принадлежат постановка задачи и идея доказательства).

Структура диссертации и объем. Диссертация состоит из введения, шести глав, приложения и списка литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц, включая две таблицы и 11 рисунков. Список литературы содержит 44 источника.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор результатов, связанных с темой диссертации, постановка задачи, дается характеристика работы, вводятся вспомогательные понятия и обозначения, необходимые для формулировки результатов диссертационной работы, формулируются в общем виде полученные результаты.

Булевы функции f_1 и f_2 назовем конгруэнтными, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Пусть $X \subseteq B_3$. Введем обозначение: $Congr(X)$ – множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3, каждая из которых конгруэнтна некоторой функции множества X. Например, $Congr\{1, x_1, x_1 \& x_2\} = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1 \& x_2, x_2 \& x_3, x_1 \& x_3\}$.

Введем обозначения:

$G_1 = \{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_1| = 8$;

$G_2 = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \oplus x_3^{\sigma_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_2| = 24$;

$G_3 = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|G_3| = 24$;

$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, $|G| = 56$;

$M_1 = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|M_1| = 24$;

$M_2 = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\sigma_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|M_2| = 8$;

$M_3 = Congr\{\bar{x}_1 (x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|M_3| = 12$;

$M_4 = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3} | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,2,3\}\}$, $|M_4| = 4$;

M_i^* – множество всех функций, двойственных функциям множества M_i соответственно, $i = 1,2,3,4$; $M = \bigcup\limits_{i=1}^{4} (M_i \cup M_i^*)$, $|M| = 96$, $|G \cup M| = 152$;

$M_5 = Congr\{x_1 \oplus x_2 \oplus a, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus b\ | a, b \in \{0,1\}\}, |M_5| = 8$;

$\Theta = Congr\{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2},\ x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3},\ x_1^{\sigma_1}(x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} x_3^{\bar{\sigma}_3}) | \sigma_i \in \{0,1\}, i \in \{1,2,3\}\}$, $|\Theta| = 32$; Θ^* – множество всех функций, двойственных функциям множества Θ;

$\Psi = \Theta \cup Congr\{x_1 (x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{2,3\}\}$, $|\Psi| = 44$; Ψ^* – множество всех функций, двойственных функциям множества Ψ, $|\Psi^*| = 44$; $\tilde{\Psi} = \Psi \cup \Psi^* \cup Congr\{\bar{x}_1, x_1, 0, 1\}$, $|\tilde{\Psi}| = 96$, очевидно, что $\tilde{\Psi} = B_3 \backslash (G \cup M \cup M_5)$;

$H = Congr\{\bar{x}_1\bar{x}_2, \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3, \bar{x}_1(\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3), \bar{x}_1 \vee (x_2\bar{x}_3 \vee \vee \bar{x}_2x_3)\}$, $|H| = 14$;

$\Omega = Congr\{x_1x_2,\ \bar{x}_1x_2,\ x_1x_2x_3,\ \bar{x}_1x_2x_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\}$; Ω^* – множество всех функций, двойственных функциям множества Ω;

$\Omega_1 = \Omega \cup Congr\{x_1(x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2}x_3^{\bar{\sigma}_3}) | \sigma_i \in \{0,1\},\ i \in \{2,3\}\}$; Ω_1^* – множество всех функций, двойственных функциям множества Ω_1;

$K_1(n)$ – множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ и отличных от функций 0, 1, x_i, $\bar{x}_i$, $x_i|x_j$, $x_i \downarrow x_j$, $x_i \sim x_j$, $x_i \to x_j$, $x_i \nrightarrow x_j$, $x_i \oplus x_j$, $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i \neq j)$;

$K_2(n)$ – множество всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$, не представимых в виде $(x_i^a \& h(\tilde{x}))^b$ или $(x_i^a \& x_j^b \vee x_i^{\bar{a}} \& x_j^{\bar{b}} \& h(\tilde{x}))^c$, где $h(\tilde{x})$ – произвольная функция, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a, b, c \in \{0, 1\}$, $|K_2(n)| \geq 2^{2^n} - 4(n2^{2^{n-1}} + (n^2 - n)2^{2^{n-2}})$;

$K_3(n)$ – множество всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$, не представимых в виде $(x_i^a \& h(\tilde{x}))^b$ или $((x_i \oplus x_j)^a \& h(\tilde{x}))^b$, где $h(\tilde{x})$ – произвольная функция, $i \neq j, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a, b \in \{0, 1\}$, $|K_3(n)| \geq 2^{2^n} - 2^{2^{n-1}+1}(n^2 + n)$;

$K_4(n)$ – множество всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geq 3)$, не представимых в виде $(x_i^a \& h(\tilde{x}))^b$, где $h(\tilde{x})$ – произвольная функция, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a, b \in \{0, 1\}$, $|K_4(n)| \geq 2^{2^n} - 4n2^{2^{n-1}}$;

$K(n) = K_2(n) \cap K_3(n) \cap K_4(n)$ $(n \geq 3)$,

$|K(n)| \geq 2^{2^n} - 2(n^2 + n)2^{2^{n-1}} - 4(n^2 - n)2^{2^{n-2}}$;

$K_i = \bigcup\limits_{n=3}^{\infty} K_i(n)$, $i = 1, 2, 3, 4$;

$K = K_2 \cap K_3 \cap K_4$.

Мощности введенных множеств легко вычисляются непосредственным подсчетом.

Замечание. *Нетрудно проверить, что* $\frac{|K(n)|}{2^{2^n}} \to 1$ *при* $n \to \infty$. *Следовательно, множество* K *содержит почти все булевы функции.*

Доказано утверждение 3.

Утверждение 3. *Пусть* B *– произвольный полный конечный базис, функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)(n \geq 1)$ *отлична от* x_i $(i = 1, 2, ..., n)$. *Тогда существуют такие целое число* $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

и схема S, реализующая функцию f, что $P(S) \sim c\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Первая глава диссертации содержит необходимые определения, обозначения и ряд вспомогательных утверждений, используемых в дальнейшем для получения верхних и нижних оценок ненадежности схем. Отметим наиболее важные из них. В теореме 1.2 явно найдены константы d, ε_0 для результата С. И. Аксенова[16] и доказано, что в произвольном полном конечном базисе любую булеву функцию f можно реализовать схемой, ненадежность которой $P(S) \le 5\varepsilon + 182\varepsilon^2 \le 5{,}2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Результат теоремы 1.2 используется при доказательстве верхних и нижних оценок ненадежности схем. Леммы 1.4–1.13 и теорема 1.6 содержат утверждения, позволяющие развивать определенную технику вычислений вероятностей ошибок на выходе схем.

Во второй главе описываются полные базисы, в которых для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \to 0$. В разделе 2.1 получены верхние оценки ненадежности схем и доказано (теоремы 2.1, 2.2 и 2.3), что если полный конечный базис B содержит функцию $\varphi \in G$, то любую функцию f в этом базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \le \varepsilon + 200\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В разделе 2.2 получены нижние оценки ненадежности схем. Из теоремы 2.4 следует, что если произвольная схема S содержит хотя бы один функциональный элемент, то она функционирует с ненадежностью $P(S) \ge \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$. В теореме 2.6 доказано, что в базисе $B \subseteq B_3 \backslash G$ при любом $n \ge 3$ любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}) \in K_2(n)$, функционирует с ненадежностью $P(S) \ge 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/4]$.

Таким образом, в полном базисе $B \subseteq B_3$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную ε ($\varepsilon \to 0$), тогда и только тогда, когда $B \cap G \neq \varnothing$.

В третьей главе описываются базисы, в которых асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$. В разделе 3.1 получены верхние оценки

[16] Аксенов С. И. О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. — 2005. — № 6 (21). — С. 42–55. — (Естественные науки).

ненадежности схем. В теореме 3.1 доказано, что если полный базис B содержит некоторую функцию множества M, то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 2\varepsilon + 144\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В теореме 3.3 доказано, что если полный базис B содержит линейную функцию, существенно зависящую от двух и более переменных, то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 2\varepsilon + 200\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В теореме 3.4 доказано, что если полный базис B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, конгруэнтную $x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3})$ $(\sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\})$, $B \cap \Psi^* \neq \varnothing$, то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 2\varepsilon + 204\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В теореме 3.5 доказано, что в базисах, двойственных базисам, удовлетворяющим условиям теоремы 3.4, любую функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 2\varepsilon + 204\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. <u>В разделе 3.2</u> получены нижние оценки ненадежности схем. В теореме 3.6 доказано, что в полном базисе $B \subseteq \Theta \cup \Theta^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\}$, или $B \subseteq \Psi \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\}$, или $B \subseteq \Psi^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\}$ при любом $n \geq 3$ любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}) \in K_3(n)$, функционирует с ненадежностью $P(S) \geq 3\varepsilon(1-\varepsilon)^3$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Таким образом, в полном базисе $B \subseteq B_3 \backslash G$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную 2ε $(\varepsilon \to 0)$, тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: или $B \cap M \neq \varnothing$; или $B \subseteq (\tilde{\Psi} \cup M_5)$ и $B \cap M_5 \neq \varnothing$; или B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, конгруэнтную $x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3})$, и $B \cap \Psi^* \neq \varnothing$; или B содержит функцию $\varphi^*(x_1, x_2, x_3)$, конгруэнтную $x_1 \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, и $B \cap \Psi \neq \varnothing$.

<u>**В четвертой главе**</u> описываются базисы, в которых асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \to 0$. <u>В разделе 4.1</u> получены верхние оценки ненадежности схем. Из теоремы 4.2 следует, что если полный базис B содержит некоторую функцию из множества H, то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 3\varepsilon + 126\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/600]$. В теореме 4.3 доказано, что если полный базис B содержит функции $\varphi_1 \in \Theta$ и $\varphi_2 \in \Theta^*$, то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 3\varepsilon + 225\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

В теореме 4.4 доказано, что если полный базис B удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

1) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3})$ $(\sigma_2, \sigma_3 \in \{0, 1\})$, и хотя бы одну из функций 1, $\bar{x}_1$;

2) B содержит константу 1 и функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)$ $(\sigma_3 \in \{0, 1\})$;

3) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = \bar{x}_1(x_2 \oplus x_3)$, и хотя бы одну из функций 1, $\bar{x}_1$,

то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 3\varepsilon + 293\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В теореме 4.5 доказано, что в базисах, содержащих функции, двойственные функциям из условий 1–3 теоремы 4.4, любую функцию f можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 3\varepsilon + 293\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

В разделе 4.2 получены нижние оценки ненадежности схем. В теореме 4.6 доказано, что в полном базисе $B \subseteq \Omega \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\}$, или $B \subseteq \Omega^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\}$, или $B \subseteq \Omega_1 \cup Congr\{\bar{x}_1, 0\}$, или $B \subseteq \Omega_1^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 1\}$ при любом $n \geq 3$ любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}) \in K_3(n)$, функционирует с ненадежностью $P(S) \geq 4\varepsilon(1-\varepsilon)^3$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Таким образом, в полном базисе $B \subseteq B_3$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную 3ε $(\varepsilon \to 0)$, тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условиям одной из теорем 4.2, 4.3, 4.4 или 4.5 (двойственный вариант теоремы 4.4).

В пятой главе описываются два класса базисов. В базисах 1-го класса асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 4ε при $\varepsilon \to 0$, а в базисах 2-го класса асимптотически оптимальные по надежности схемы функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 5ε при $\varepsilon \to 0$. В разделе 5.1 получены верхние оценки ненадежности схем и доказано (теорема 5.1), что если полный базис B удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:

1) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$, и хотя бы одну из функций $\bar{x}_1$, 1;

2) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi_1^* = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$, и хотя бы одну из функций $\bar{x}_1$, 0;

3) B содержит функцию $\bar{x}_1$ и хотя бы одну из функций $\varphi_2 = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)$ или $\varphi_3 = \bar{x}_1x_2x_3$, где $\sigma_3 \in \{0,1\}$;

4) B содержит функцию $\bar{x}_1$ и хотя бы одну из функций $\varphi_2^* = x_1 \vee (x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)$ или $\varphi_3 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$, где $\sigma_3 \in \{0,1\}$,

то любую функцию f в базисе B можно реализовать схемой A с ненадежностью $P(A) \leq 4\varepsilon + 250\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$. В разделе 5.2 получены нижние оценки ненадежности схем. В теоремах 5.2–5.5 доказано, что в полном базисе $B \subseteq Congr\{x_1\&x_2,\ x_1\&x_2\&x_3,\ \bar{x}_1,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1\&x_2,\ x_1\&x_2\&x_3,\ \bar{x}_1\&x_2,\ \bar{x}_1\&x_2\&x_3,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3,\ 0,1\}$ при любом $n \geq 3$ любая схема, реализующая функцию $f(\tilde{x}) \in K_4(n)$, функционирует с ненадежностью $P(S) \geq 5\varepsilon(1-\varepsilon)^4$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Таким образом, в полном базисе $B \subseteq B_3$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную 4ε ($\varepsilon \to 0$), тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условиям теорем 5.1 и 4.6.

Из теорем 1.2 и 5.2–5.5 следует, что в полном базисе $B \subseteq B_3$ для почти всех функций асимптотически оптимальные по надежности схемы имеют ненадежность, асимптотически равную 5ε ($\varepsilon \to 0$), тогда и только тогда, когда $B \subseteq Congr\{x_1\&x_2,\ x_1\&x_2\&x_3,\ \bar{x}_1,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1\&x_2,\ x_1\&x_2\&x_3,\ \bar{x}_1\&x_2,\ \bar{x}_1\&x_2\&x_3,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1,\ 0,1\}$, или $B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3,\ 0,1\}$.

В шестой главе рассматривается сложность асимптотически оптимальных по надежности схем. Схемы, построенные при доказательстве теоремы 6.1, для почти всех функций являются асимптотически оптимальными по надежности, а их сложность отличается от сложности минимальных схем, построенных из абсолютно надежных элементов, в $3(1+b)$ раз, где b – любое сколь угодно малое положительное число.

Выводы. Основные результаты работы в самом общем виде можно сформулировать в виде теорем 1, 2.

Теорема 1. Для любого полного базиса $B \subseteq B_3$ можно указать такое натуральное $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, что для любой булевой функции f существует схема S, реализующая f, для которой

$$P(S) \leq c\varepsilon + d_1\varepsilon^2,$$

и для любой булевой функции $f \in K$

$$P_\varepsilon(f) \geq c\varepsilon - d_2\varepsilon^2$$

при всех $\varepsilon \in (0; 1/960]$, где d_1 и d_2 – некоторые (абсолютные) положительные константы.

Теорема 2. Для любого полного базиса $B \subseteq B_3$, любого действительного числа $b > 0$ существует такая константа $\varepsilon_0 \in (0; 1/2)$, что при любом $n \geq 3$ любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in K(n)$ можно реализовать схемой S_f, для которой $P(S_f) - P_\varepsilon(f) \leq d_3\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $L(S_f) \lesssim 3(1+b)\rho 2^n/n$ при $n \to \infty$, где d_3 – некоторая (абсолютная) положительная константа.

Из теоремы 1 следует, что в рассматриваемом базисе B можно указать такое натуральное $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, что для любой функции $f \in K$ можно построить асимптотически оптимальную по надежности схему A, реализующую f, для которой $P(A) \sim c\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Из теоремы 2 следует, что для почти всех булевых функций f можно строить асимптотически оптимальные по надежности схемы, сложность которых асимптотически не больше чем в $3(1 + b)$ раз превышает сложность минимальных схем, построенных из абсолютно надежных элементов, где b – любое сколь угодно малое положительное число.

Для всех базисов $B \subseteq B_3$ константы c, d_1, d_2 найдены явно и представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

B	c	d_1
$B \cap G_1 \neq \varnothing$	1	8
$B \cap G_2 \neq \varnothing$	1	200
$B \cap G_3 \neq \varnothing$	1	8
$B \cap M \neq \varnothing$	2	144
B содержит линейную функцию, существенно зависящую от 2 или более переменных	2	200
B содержит функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, конгруэнтную $x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3})$, и $B \cap \Psi^* \neq \varnothing$	2	204
B содержит функцию $\varphi^*(x_1, x_2, x_3)$, конгруэнтную $x_1 \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, и $B \cap \Psi \neq \varnothing$	2	204
$B \cap H \neq \varnothing$	3	126
B удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: 1) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1(x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3})$ $(\sigma_2, \sigma_3 \in \{0,1\})$, и хотя бы одну из функций 1, $\bar{x}_1$; 2) B содержит константу 1 и функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)(\sigma_3 \in \{0,1\})$; 3) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = \bar{x}_1(x_2 \oplus x_3)$, и хотя бы одну из функций 1, $\bar{x}_1$	3	293
B удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: 1) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1 \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ $(\sigma_2, \sigma_3 \in \{0,1\})$, и хотя бы одну из функций 0, $\bar{x}_1$; 2) B содержит константу 0 и функцию, конгруэнтную функции $\varphi = x_1 \vee (x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)(\sigma_3 \in \{0,1\})$; 3) B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi = \bar{x}_1 \vee (x_2 \oplus x_3 \oplus 1)$, и хотя бы одну из функций 0, $\bar{x}_1$	3	293
B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, и хотя бы одну из функций $\bar{x}_1$, 1	4	250
B содержит функцию, конгруэнтную функции $\varphi_1^* = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$, и хотя бы одну из функций $\bar{x}_1$, 0	4	250
B содержит функцию $\bar{x}_1$ и хотя бы одну из функций, конгруэнтных функции $\varphi_2 = x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)$ или $\varphi_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3$, где $\sigma_3 \in \{0,1\}$	4	250
B содержит функцию $\bar{x}_1$ и хотя бы одну из функций, конгруэнтных функции $\varphi_2^* = x_1 \vee (x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma_3)$ или $\varphi_3 = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$, где $\sigma_3 \in \{0,1\}$	4	250
$B \subseteq Congr\{x_1 \& x_2,\ x_1 \& x_2 \& x_3,\ \bar{x}_1,\ 0, 1\}$	5	182
$B \subseteq Congr\{x_1 \& x_2,\ x_1 \& x_2 \& x_3,\ \bar{x}_1 \& x_2,\ \bar{x}_1 \& x_2 \& x_3,\ 0, 1\}$	5	182
$B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1,\ 0, 1\}$	5	182
$B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3,\ 0, 1\}$	5	182

Таблица 2

B	c	d_2	$K(n)$
$B = B_3$	1	0	–
$B \subseteq B_3 \backslash G$	2	2	$K_2(n)$
$B \subseteq (\Theta \cup \Theta^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\})$, или $B \subseteq (\Psi \cup \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\})$, или $B \subseteq (\Psi^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\})$	3	9	$K_3(n)$
$B \subseteq (\Omega \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\})$, или $B \subseteq (\Omega^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 0, 1\})$, или $B \subseteq (\Omega_1 \cup Congr\{\bar{x}_1, 0\})$, или $B \subseteq (\Omega_1^* \cup Congr\{\bar{x}_1, 1\})$	4	12	$K_3(n)$
$B \subseteq Congr\{x_1\&x_2, x_1\&x_2\&x_3, \bar{x}_1\&x_2, \bar{x}_1\&x_2\&x_3, 0, 1\}$ или $B \subseteq Congr\{x_1\&x_2,\ x_1\&x_2\&x_3,\ \bar{x}_1,\ 0, 1\}$	5	20	$K_4(n)$
$B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3,\ 0, 1\}$ или $B \subseteq Congr\{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ \bar{x}_1,\ 0, 1\}$	5	20	$K_4(n)$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору М. А. Алехиной за постоянное внимание к работе, поддержку и полезные советы, а также сотрудникам кафедры дискретной математики МГУ им. М. В. Ломоносова за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению текста диссертации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы [1–7] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций.

1. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 4. – С. 3–17.
2. Алехина, М. А. О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Ученые записки Казанского государственного университета. – Казань : Изд-во Казанского университета, 2009. – Т. 151. – Кн. 2. – С. 25–36. – (Физико-математические науки).
3. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1|x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1\&x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 3–10.
4. Алехина, М. А. Синтез асимптотически оптимальных схем / М. А. Алехина, А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 48–62.

5. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – Т. 16. – № 6. – С. 12–22.

6. Алехина, М. А. Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с ненадежностью 2ε / М. А. Алехина, А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2010. – № 5. – С. 79–82.

7. Васин, А. В. О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадежностью 5ε / А. В. Васин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 64–79.

8. Васин, А. В. О функциях, используемых для повышения надежности схем / А. В. Васин // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Международного семинара, посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (г. Москва, 18–23 июня 2007 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2007. – С. 71–73.

9. Васин, А. В. Об уточнении оценки ненадежности схем из ненадежных функциональных элементов / А. В. Васин // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : труды Международной конференции (г. Пенза, 22–24 апреля 2008 г.). – Пенза : ИИЦ ПГУ, 2008. – С. 269–271.

10. Васин, А. В. О функциях специального вида / А. В. Васин // Дискретные модели в теории управляющих систем : труды VIII Международной конференции (Лесной городок Моск. обл., 6–9 апреля 2009 г.). – М. : Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова ; МАКС Пресс, 2009. – С. 43–46.

11. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе из всех двухвходовых элементов / А. В. Васин // Проблемы оптимизации и экономические приложения : материалы IV Всероссийской конференции (г. Омск, 29 июня – 4 июля, 2009 г.) / Омский филиал Института математики СО РАН. – Омск : Полиграфический центр КАН, 2009. – С. 118.

12. Васин, А. В. Нижние оценки ненадежности асимптотически оптимальных схем в базисе $\{x_1 \& x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Синтез и сложность управляющих систем : материалы XVIII Международной школы-семинара (г. Пенза, 28 сентября – 2 октября 2009 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. – С. 18–20.
13. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в частных базисах, содержащих линейные функции двух или трех переменных / А. В. Васин // Проблемы автоматизации и управления в технических системах : труды Международной научно-технической конференции (г. Пенза, 20–23 октября 2009 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. – С. 48–50.
14. Васин, А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов / А. В. Васин // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (г. Москва, 18 – 23 мая 2009 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак-та МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009. – Ч. 1. – С. 15–19.
15. Васин, А. В. О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы имеют ненадежность 2ε / А. В. Васин // Дискретная математика и ее приложения : материалы X Международного семинара (г. Москва, 1–6 февраля 2010 г.). – М. : Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2010. – С. 94–97.
16. Алехина, М. А. Сложность асимптотически оптимальных схем в базисах, содержащих булевы функции, существенно зависящие не более чем от трех переменных / М. А. Алехина, А. В. Васин // Надежность и качество : труды Международного симпозиума (г. Пенза, 24–31 мая 2010 г.). – Пенза : ИИЦ ПГУ, 2010. – Т. 1. – С. 239–241.
17. Васин, А. В. О надежности схем в полных конечных базисах, содержащих линейную функцию / А. В. Васин // Надежность и качество : труды Международного симпозиума (г. Пенза, 24–31 мая 2010 г.). – Пенза : ИИЦ ПГУ, 2010. – Т. 1. – С. 241–242.

Научное издание

Васин Алексей Валерьевич

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМЫ В ПОЛНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ТРЕХВХОДОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Редактор Е. В. Денисова
Компьютерная верстка А. В. Васина

Подписано в печать 07.10.2010. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$
Усл. печ. л. 1,40.
Заказ № 001913. Тираж 100.

Издательство ПГУ
Пенза, Красная, 40, т.: 56-47-33